Диагностика стохастического ионосферного канала по данным системного радиозондирования в декаметровом диапазоне

Чудаев С.О., Афанасьев Н.Т., Лукьянцев Д.С.

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия
spacemaklay@gmail.com

Для обеспечения надежной работы ионосферных радиоканалов большое внимание уделяется мониторингу стохастической структуры ионосферы и анализу ее воздействия на характеристики распространения радиоволн [1]. Актуальным является вывод функциональных соотношений между характеристиками принятого сигнала и параметрами ионосферных неоднородностей для прогнозирования оптимальных условий прохождения сигнала и улучшения его качества. В реальных радиоканалах сведения о параметрах неоднородностей среды весьма ограничены, поэтому расчет статистических моментов сигнала носит приближенный характер и в ряде случаев не достаточен для требований практики. В этих условиях оценка характеристик сигнала возможна с привлечением информации о неоднородностях, полученной путем обращения данных зондирования на вспомогательных трассах. Диагностику параметров неоднородностей обычно проводят путем обращения треков ионограмм, полученных для какого-либо отдельного метода зондирования (вертикального (ВЗ), наклонного (НЗ), трансионосферного (ТИЗ) и др.). Значительные результаты в данном направлении были получены благодаря системным исследованиям [2,3], направленным на повышение точности диагностики состояния ионосферного радиоканала посредством совместного анализа дистанционно-частотных (ДЧХ) и других характеристик декаметровых сигналов наземных и низкоорбитальных бортовых ионозондов. В основе этого анализа лежит численный синтез треков ионограмм и вариаций других характеристик сигналов с использованием современных моделей ионосферы. Системное зондирование ионосферы применяют для определения параметров детерминированных и случайных неоднородностей электронной плотности. Выполненный анализ показал, что диагностика случайных неоднородностей с помощью имитационного моделирования характеристик сигналов методом Монте-Карло с последующим фитированием результатов расчетов до их совпадения с экспериментально-наблюдаемыми величинами в ряде случаев не однозначна, а метод фитирования не устойчив. Дополнительные трудности возникают при численном решении стохастической краевой задачи распространения декаметровых радиоволн на ионосферных радиотрассах.

Для диагностики случайных неоднородностей электронной плотности в работе получены приближенные функциональные соотношения между параметрами модели пространственно-временной корреляционной функции неоднородностей и статистическими траекторными характеристиками сигналов наземных и бортовых ионозондов. Совместное использование данных о флуктуациях отраженных и прошедших сквозь ионосферу сигналов позволяет снимать неоднозначность при обращении найденных функциональных соотношений. Используя полученные сведения о параметрах неоднородностей, выраженных через измеряемые статистические моменты характеристик сигналов ТИЗ с низкоорбитальных космических аппаратов и сигналов НЗ можно перейти к прямой диагностике состояния высокоорбитального трансионосферного канала по данным декаметрового зондирования на вспомогательных ионосферных радиотрассах.

ОСНОВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Для оценки ожидаемых статистических траекторных характеристик сигнала, излученного с борта высокоорбитального искусственного спутника Земли (ИСЗ) могут быть использованы данные совместных измерений статистических характеристик декаметровых сигналов на вспомогательной наклонной трассе и на трассе ТИЗ с низкоорбитального ИСЗ.

В качестве прогнозируемых характеристик сигнала с высокоорбитального ИСЗ будем рассматривать вторые статистические моменты фазы, групповой задержки и доплеровского смещения частоты. В лучевом приближении [4] для отдельных реализаций этих характеристик в изотропной случайно-неоднородной ионосфере имеем:

$$\varphi = \frac{2\pi f}{c}\int^{S}\sqrt{\varepsilon(x,y,z,\tau)}\,dS\,, \quad t = \int^{S}\frac{dS}{c\sqrt{\varepsilon(x,y,z,\tau)}}\,, \quad \Delta f = -\frac{f}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\int^{S}\sqrt{\varepsilon(x,y,z,\tau)}\,dS \qquad (1)$$

где: $\varepsilon = \varepsilon(x,y,z,\tau)$ - пространственно-временная случайная функция диэлектрической проницаемости, τ - время, f - рабочая частота, c - скорость света, $dS = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$ - элемент дуги траектории, соединяющей пункты приема и излучения сигнала. Для расчета траекторий используем систему стохастических дифференциальных уравнений с независимой переменной элемента дальности dx [5]:

$$\frac{dz}{dx} = \cot\beta\,, \quad \frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1+\sin^2\beta\tan^2\alpha\right)\left(\frac{\partial\sqrt{\varepsilon}}{\partial x}\cot\beta - \frac{\partial\sqrt{\varepsilon}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha\,, \quad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1+\cos^2\alpha\cot^2\beta\right)\left(\frac{\partial\sqrt{\varepsilon}}{\partial y} - \frac{\partial\sqrt{\varepsilon}}{\partial x}\tan\alpha\right) \qquad (2)$$

где: x, y, z - текущие координаты луча, α, β - углы рефракции в азимутальной и угломестной плоскостях.

Статистические моменты траекторных характеристик сигнала определим в приближении метода возмущений [6]. Для функций, входящих в уравнения (1),(2) используем разложения: $\varepsilon=\varepsilon_0(z)+\varepsilon_1(x,y,z,\tau)$, $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$, $t=t_0+t_1$, $\Delta f=\Delta f_0+\Delta f_1$,

$$z=z_0+z_1,\ \ y=y_0+y_1,\ \ \alpha=\alpha_0+\alpha_1,\ \ \beta=\beta_0+\beta_1, \tag{3}$$

где: $y_0,z_0,\alpha_0,\beta_0,\varphi_0,t_0,\Delta f_0,y_1,z_1,\alpha_1,\beta_1,\varphi_1,t_1,\Delta f_1$ - средние и флуктуационные характеристики сигнала; функция ε_0 - описывает среднюю диэлектрическую проницаемость канала, ε_1 - характеризует пространственно-временные случайные неоднородности ионосферы. Далее для простоты будем считать, что средняя траектория луча лежит в плоскости XOZ ($\alpha_0=0,\ y_0=0$). Подставляя разложения (3) в (1),(2) и выполняя вычисления с учетом граничных условий в пунктах приема и излучения, получаем уравнения для флуктуаций:

$$\varphi_1=\frac{\pi f}{c}\int_0^{xp}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\frac{dx}{\sin\beta_0},\ t_1=\int_0^{xp}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z_0}\frac{F_p(x)dx}{c\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_0}-\frac{1}{2}\int_0^{xp}\frac{\varepsilon_1 dx}{c\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_0},\ \Delta f_1=-\frac{f}{2c}\int_0^{xp}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau}\frac{dx}{\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_0} \tag{4}$$

где: $$F_p(x)=F_{1p}(x)+F_{2p}(x),\ \ F_{1p}(x)=\frac{cR_{2p}(x)P_{1p}(x)}{2\sin\beta_p R_{1p}(x_{исзр})},\ \ F_{2p}(x)=\frac{cR_{1p}(x)P_{2p}(x)}{2\sin\beta_p R_{1p}(x_{исзр})},$$

$$P_{1p}(x)=\int_0^{x}\frac{\sin\beta_0}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0}R_{1p}(x)\frac{dx}{c\sqrt{\varepsilon_0}},\ \ P_{2p}(x)=\int_x^{xp}\frac{\sin\beta_0}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0}R_{2p}(x)\frac{dx}{c\sqrt{\varepsilon_0}} \tag{5}$$

$R_{1p}=\dfrac{\partial z_0}{\partial\beta_p}(x)$, $R_{2p}=\dfrac{\partial z_0}{\partial\beta_p}(x_{исзр}-x)$ - фундаментальные решения краевой траекторной задачи, β_p - угол входа сигнала в канал (отсчитывается от вертикали), x_p - проекция на земную поверхность луча, прошедшего сквозь ионосферу и направленного на источник с координатами: $x_{исзр}$, $z_{исзр}$. Интегрирование в (4),(5) проводится по средней траектории, являющейся решением системы лучевых уравнений:

$$\frac{dz_0}{dx}=\cot\beta_0 \qquad \frac{d\beta_0}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\frac{\partial\sqrt{\varepsilon_0}}{\partial z_0} \tag{6}$$

На основе (4), получим статистические моменты траекторных характеристик принятого сигнала. Рассмотрим условия квазиоднородного случайного поля неоднородностей канала. Функцию корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости зададим в виде [7]:

$$N=\langle\varepsilon_1(x_1,y_1,z_1,\tau_1)\varepsilon_1(x_2,y_2,z_2,\tau_2)\rangle=N_1N_0 \tag{7}$$

где N_0 - однородная часть корреляционной функции. Функция N_1 характеризует статистическую неоднородность случайного поля неоднородностей и учитывает непостоянство параметров неоднородностей в канале, причем функция N_1 изменяется более медленно, чем N_0. В качестве функции N_1 рассмотрим зависимость $N_1 = \mu^2(1-\varepsilon_0)^2$, где μ^2 - интенсивность случайных неоднородностей электронной концентрации ионосферы. Движение неоднородностей учтем в рамках гипотезы о замороженном переносе:

$$N_0 = \exp\left(-\frac{1}{a^2}\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2-V(\tau_1-\tau_2))^2\right]\right), \qquad (8)$$

где a - масштаб неоднородностей, V - скорость движения случайного поля неоднородностей. Составляя из (4) статистические моменты и проводя аналитические преобразования, для выбранной модели функции корреляции неоднородностей получаем интегральные выражения для дисперсий траекторных характеристик сигнала:

$$\sigma^2_{\varphi p} = \int_0^{x_p} \frac{\sqrt{\pi}\omega^2 a\mu^2(1-\varepsilon_0)^2}{4c^2\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_p}dx, \quad \sigma^2_{fp} = \int_0^{x_p} \frac{f^2\sqrt{\pi}V^2\mu^2(1-\varepsilon_0)^2}{2a}\frac{\sin\beta_0}{c^2\varepsilon_0}dx$$

$$\sigma^2_{\Delta tp} = 2\int_0^{x_p}\left[F_p(x)\right]^2\frac{\mu^2(1-\varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^2\sin\beta_0}\sin^2\beta_p\frac{\sqrt{\pi}}{ac^2}dx + \int_0^{x_p}\frac{\sqrt{\pi}a}{4c^2}\cdot\frac{\mu^2(1-\varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3\sin\beta_0}dx, \qquad (9)$$

где: $\omega = 2\pi f$. Таким образом, зная параметры корреляционной функции ионосферных неоднородностей, можно оценить статистические характеристики трансионосферного сигнала, излученного с борта высокоорбитального ИСЗ.

Для определения параметров корреляционной функции можно использовать результаты решения обратной задачи для статистических моментов декаметрового сигнала на вспомогательной трансионосферной трассе для низкоорбитального ИСЗ. Между тем, вследствие значительной скорости низколетящего ИСЗ, движение случайных ионосферных неоднородностей дает малый вклад в общий эффект Доплера, возникающий на радиотрассе. Поэтому для оценки скорости случайных неоднородностей необходимы дополнительные экспериментальные данные на трассе, где нестационарность ионосферы играет определяющую роль при формировании интегрального доплеровского эффекта. В качестве такой трассы можно использовать наклонную односкачковую трассу. Важно, чтобы пункты приема сигналов на наклонной и трансионосферных трассах для низко и высокоорбитальных ИСЗ были совмещены.

Используя математический аппарат, что и выше, для моментов траекторных характеристик сигналов на вспомогательных трассах НЗ и ТИЗ имеем:

$$\sigma^2_{fm} = \int_0^{x_m} \frac{f^2\sqrt{\pi}V^2\mu^2(1-\varepsilon_0)^2}{2a}\frac{\sin\beta_0}{c^2\varepsilon_0}dx \qquad \text{(НЗ)} \qquad (10)$$

$$\sigma^2_{\varphi} = \int_0^{x_\kappa} \frac{\sqrt{\pi}\omega^2 a\mu^2(1-\varepsilon_0)^2}{4c^2\sqrt{\varepsilon_0}\sin\beta_n}dx \qquad \text{(ТИЗ)}$$

$$\sigma_{\Delta t}^2 = 2\int\limits_0^{x_K} \left[F(x)\right]^2 \frac{\mu^2(1-\varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^2 \sin\beta_0} \sin^2\beta_n \frac{\sqrt{\pi}}{a c^2} dx + \int\limits_0^{x_K} \frac{\sqrt{\pi} a}{4c^2} \frac{\mu^2(1-\varepsilon_0)^2}{\varepsilon_0^3 \sin\beta_0} dx \qquad \text{(ТИЗ)}$$

где:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x), \quad F_1(x) = \frac{c}{2\sin\beta_n R_1(x_{исзк})} R_2(x) P_1(x), \quad F_2(x) = \frac{c}{2\sin\beta_n R_1(x_{исзк})} R_1(x) P_2(x),$$

$$P_1(x) = \int\limits_0^{x} \frac{\sin\ \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0} \frac{R_1(x)}{c\sqrt{\varepsilon_0}} dx, \quad P_2(x) = \int\limits_x^{x_K} \frac{\sin\ \beta_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial z_0} \frac{R_2(x)}{c\sqrt{\varepsilon_0}} dx \qquad (11)$$

$R_1 = \dfrac{\partial z_0}{\partial\beta_n}(x)$, $R_2 = \dfrac{\partial z_0}{\partial\beta_n}(x_{исзк} - x)$ - фундаментальные решения краевой траекторной задачи на низкоорбитальной спутниковой трассе, β_n - начальный угол входа в канал сигнала, излученного с борта низкоорбитального ИСЗ; x_m - дальность наклонной трассы, $x_к$ - проекция на земную поверхность луча, прошедшего сквозь ионосферу и направленного на вспомогательный спутниковый источник с координатами: $x_{исзк}$, $z_{исзк}$. Интегрирование в (10),(11) проводится по средним траекториям, являющимся решениями системы уравнений (6) на наклонной и вспомогательной спутниковой трассах.

Решая уравнения (10) относительно неизвестных параметров корреляционного эллипсоида, получаем:

$$\mu^2 = \sqrt{\frac{J_1\sigma_{\Delta t}^2 - J_3\sigma_{\varphi}^2}{J_2 J_1^2}}, \quad a = \frac{\sqrt{J_2\sigma_{\varphi}^2}}{\sqrt{J_1\sigma_{\Delta t}^2 - J_3\sigma_{\varphi}^2}} \quad V = \sqrt{\frac{\sigma_{fm}^2 J_1 J_2}{J_4(J_1\sigma_{\Delta t}^2 - J_3\sigma_{\varphi}^2)}} \qquad (12)$$

где: $$J_1 = \frac{\sqrt{\pi}\omega^2}{4c^2 \sin\beta_p} \int\limits_0^{x_K} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \qquad J_2 = \frac{2\sin\beta_p \sqrt{\pi}}{c^2} \int\limits_0^{x_K} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 F_p^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0^3}},$$

$$J_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{4c^2 \sin\beta_p} \int\limits_0^{x_K} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0^5}} \qquad J_4 = \frac{f^2\sqrt{\pi}}{2c^2 \sin\beta_m} \int\limits_0^{x_m} \frac{\sin^2\beta_0 (1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0}} \qquad (13)$$

β_m - начальный угол входа сигнала в канал на трассе НЗ.

Определив параметры эллипсоида на вспомогательных трассах, можно рассчитать ожидаемые статистические характеристики сигнала на заданной высокоорбитальной спутниковой трассе. Подставляя найденные параметры корреляционного эллипсоида (12) в (9) и проводя аналитические преобразования, имеем:

$$\sigma_{\varphi p}^2 = \frac{G_1}{J_1}\sigma_{\varphi}^2, \qquad \sigma_{fp}^2 = \frac{G_4}{J_4}\sigma_{fm}^2, \qquad \sigma_{\Delta tp}^2 = \frac{G_2}{J_2}\sigma_{\Delta t}^2 + \sigma_{\varphi}^2\left(\frac{G_3}{J_1} - \frac{G_2 J_3}{J_2 J_1}\right) \qquad (14)$$

где: $$G_1 = \frac{\sqrt{\pi}\omega^2}{4c^2 \sin\beta_n} \int\limits_0^{x_p} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad G_2 = \frac{2\sin\beta_n \sqrt{\pi}}{c^2} \int\limits_0^{x_p} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 F^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0^3}}$$

$$G_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{4c^2 \sin\beta_n} \int_0^{x_p} \frac{(1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0^5}}, \quad G_4 = \frac{f^2\sqrt{\pi}}{2c^2 \sin\beta_p} \int_0^{x_p} \frac{\sin^2\beta_0 (1-\varepsilon_0)^2 dx}{\sqrt{\varepsilon_0}} \tag{15}$$

Соотношения (14) определяют явную связь статистических траекторных характеристик основного и вспомогательных сигналов на трассах ТИЗ и НЗ. Проводя измерения σ_φ^2, σ_{fm}^2, $\sigma_{\Delta t}^2$ сигналов на вспомогательных трассах и задавая средний высотный профиль диэлектрической проницаемости ионосферы ε_0, формулы (14) можно использовать для расчетов ожидаемых статистических траекторных характеристик сигнала на основной высокоорбитальной спутниковой трассе.

РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Апробация метода прямой диагностики стохастического трансионосферного канала была выполнена путем постановки численного эксперимента. Для оценок ожидаемых дисперсий траекторных характеристик сигналов на заданных высокоорбитальных спутниковых трассах в качестве входных данных использовались результаты расчетов траекторных моментов сигналов на вспомогательных трассах, полученные при известных параметрах ионосферных неоднородностей. Расчеты были выполнены для аналитической однослойной модели:

$$\varepsilon_0(z_0) = 1 - \frac{f_{кр}^2}{f^2} \exp\left(-\left(\frac{z_0 - z_m}{y_m}\right)^2\right), \tag{16}$$

где z_m, y_m, $f_{кр}$ высота максимума ионизации, полутолщина и критическая частота слоя. Параметры модели: $z_m = 350\,км.$, $y_m = 150\,км.$, $f_{кр} = 7\,МГц$.

Для реализации метода диагностики были выбраны координаты проекций низколетящего спутника: $x_к = 1500\,км.$, $z_к = 800\,км.$ и односкачковая наклонная радиотрасса протяженностью $x_m = 2500\,км.$ Параметры корреляционного функции случайных неоднородностей были взяты: $\mu^2 = 0.0004$, $a = 10\,км.$, $V = 50\,м/с$. Для выбранных параметров на основе (10) рассчитывалась дисперсия доплеровского смещения частоты сигнала на трассе НЗ на рабочей частоте $f = 20\,МГц$. Дисперсии фазы и групповой задержки сигнала ТИЗ с низкоорбитального ИСЗ рассчитывались на рабочей частоте $f = 25\,МГц$. Полученные значения составили: среднеквадратичное отклонение фазового пути $\sigma_\Phi = \frac{\sigma_\varphi c}{2\pi f} = 35\,м.$, $\sigma_{fm} = 0.047\,Гц.$, среднеквадратичное отклонение группового пути $\sigma_{\Delta L} = c\sigma_{\Delta t} = 54\,м.$ Найденные флуктуационные характеристики сигналов на вспомогательных трассах использовались в

(14) для определения ожидаемых дисперсий фазы, групповой задержки и доплеровского сдвига частоты сигналов на заданных трассах ТИЗ с высокоорбитальных ИСЗ. Интегральные коэффициенты, входящие в (14), рассчитывались путем совместного численного интегрирования систем уравнений для заданных высокоорбитальных радиотрасс и вспомогательных трасс НЗ и ТИЗ низколетящего космического аппарата. Результаты математического моделирования представлены в Таблице 1.

Таблица 1. . Ожидаемые статистические характеристики сигналов высокоорбиальных ИСЗ в трансионосферном канале ($f = 45$ *МГц.*).
(направление на низколетящий ИСЗ $x_к = 1500$ *км.*, $z_к = 800$ *км.*,
длина наклонной трассы $x_m = 2500$ *км.*).

z_p (*км.*)	x_p (*км.*)	$\sigma_{\Phi p}$ (*м.*)	σ_{fp} (*Гц.*)	$\sigma_{\Delta Lp}$ (*м.*)
1200	3000	33	0.035	43
1250	3150	35	0.0372	47
1350	3200	41	0.039	52
1400	3500	49	0.044	59.3

Из Таблицы 1 следует, что рассчитанные ожидаемые флуктуации фазы, доплеровского смещения частоты и групповой задержки сигналов на трассах высокоорбитальных ИСЗ соответствуют известным физическим представлениям о процессе рассеяния метровых и декаметровых радиоволн на ионосферных неоднородностях, превышающих размер первой зоны Френеля [8]. Вместе с тем при расположении приемных и передающих пунктов основного или вспомогательных сигналов в окрестностях точек фокусировки поля, полученные выше соотношения имеют ограничения. В этих точках фундаментальные решения $\frac{\partial z_0}{\partial \beta_n}, \frac{\partial z_0}{\partial \beta_p}$ обращаются в ноль и в формулах (9),(10) возникают особенности [9], связанные с ветвлением решений краевых траекторных задач для основного и вспомогательных источников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод прямой диагностики ожидаемых статистических характеристик сигнала, излученного с высокоорбитального искусственного спутника Земли по данным совместных измерений статистических моментов декаметровых сигналов на трассах НЗ и ТИЗ с низкоорбитального космического аппарата. Апробация метода прямой диагностики канала выполнена путем численного моделирования. Результаты численных экспериментов показали работоспособность используемого математического аппарата для оценки ожидаемых вторых статистических моментов фазы, групповой задержки и доплеровского сдвига частоты сигналов в ионосферном канале в типичных геофизических условиях. Для реализации метода используется модель средней диэлектрической проницаемости ионосферы. Такая модель может быть задана аналитическим профилем, наиболее соответствующим геофизической обстановке. Также допускается использование современных глобальных моделей, которые определяют электронную концентрацию ионосферы в виде дискретных данных.

Работа поддержана Минобрнауки России (гос.задание FZZE-2024-0005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благовещенский Д.В., Жеребцов Г.А. Высокоширотные геофизические явления и прогнозирование коротковолновых радиоканалов. М.: Наука, 1987. 272 с.
2. Труды института прикладной геофизики имени академика Е.К. Фёдорова выпуск 91. Радиозондирование ионосферы спутниковыми и наземными ионозондами. Издание 2 / Под ред. доктора ф.-мат. наук профессора В.Б. Лапшина.- Обнинск: ФГБУ “ВНИИГМИ-МЦД”. 2014. 310 с.
3. Системный мониторинг ионосферы. Сборник научных трудов /. Под ред. доктора физ.-мат. наук Н.Г. Котонаевой. — М.: ФИЗМАТЛИТ,. 2019. 416 с.
4. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
5. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения. М.: Физматлит, 2008. Т. 1. 317 с.
6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
7. Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984. 392 с.
8. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2: Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
9. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме. // Радиотехника и электроника, М.: Наука. 2012. Т.57. №9. С. 1028-1034.